

§ Sistema de dois elétrons

Usamos o ket $|\vec{x}_1 s_1; \vec{x}_2 s_2\rangle$ para a posição e spin das partículas. Escrevemos a função de onda do sistema como uma combinação linear (para S_{tot} bem definido):

$$\Psi_\alpha(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \sum_{s_1 s_2} C(s_1 s_2) \langle \vec{x}_1 s_1; \vec{x}_2 s_2 | \alpha \rangle$$

Para um sistema fechado, o Hamiltoniano comuta com

$$\vec{S}_{tot} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2,$$

$$[\vec{S}_{tot}^2, \mathcal{H}] = 0,$$

de maneira que esperamos que as autofunções sejam autoestados de \vec{S}_{tot}^2 . Separando a parte orbital da parte espinorial, escrevemos

$$\Psi_\alpha = \phi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \chi(s_1, s_2),$$

onde a parte espinorial representa um singlete e um tripleto:

$$D^{(1/2)} \times D^{(1/2)} = D^{(0)} + D^{(1)}$$

$$D^{(0)}: \left\{ \begin{array}{l} \chi(s_1, s_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\chi(+ -) - \chi(- +)] \\ \text{antisimétrica} \end{array} \right.$$

(singlete)

$$D^{(1)}: \left\{ \begin{array}{l} \chi(++), \\ \chi(--), \\ \frac{1}{\sqrt{2}} [\chi(+ -) + \chi(- +)] \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \} \text{todas} \\ \} \text{simétricas} \end{array} \right.$$

(tripleto)

Isto é razoável porque o operador de permutação P_{12} comuta com todas as componentes do spin total:

$$P_{12} (S_1^\alpha + S_2^\alpha) P_{12}^{-1} = S_2^\alpha + S_1^\alpha,$$

e portanto a paridade dos estados é bem definida. Neste caso temos:

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}_1 \beta_1; \vec{x}_2 \beta_2 | P_{12} | \alpha \rangle &= \langle \vec{x}_{\sigma(1)} \beta_{\sigma(1)}; \vec{x}_{\sigma(2)} \beta_{\sigma(2)} | \alpha \rangle \\ &= \langle \vec{x}_2 \beta_2; \vec{x}_1 \beta_1 | \alpha \rangle = - \langle \vec{x}_1 \beta_1; \vec{x}_2 \beta_2 | \alpha \rangle, \end{aligned}$$

propriedade requerida pela estatística de Fermi-Dirac.

O operador de permutação pode ser separado em um produto da parte espacial e spinorial

$$P_{12} = P_{12}^{(esp)} \cdot P_{12}^{(spin)}$$

Os operadores agem sobre espaços diferentes e portanto comutam. Consideremos o operador, chamado de troca,

$$T = \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2, \quad \vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$$

Temos que $(\vec{S}_1 + \vec{S}_2)^2 = \vec{S}^2 = \vec{S}_1^2 + \vec{S}_2^2 + 2\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$,

porque

$$[\vec{S}_1, \vec{S}_2] = 0$$

A base que diagonaliza o spin total é $|SM, s_1, s_2\rangle$, de maneira que $(\vec{S}_1^2, S_{1z}, \vec{S}_2^2, S_{2z})$ são diagonais simultaneamente. Portanto o operador $T = \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$ é também diagonal

$$\begin{aligned} T = \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 &= \frac{1}{2} (\vec{S}^2 - \vec{S}_1^2 - \vec{S}_2^2) \\ &= \frac{\hbar^2}{2} [S(S+1) - s_1(s_1+1) - s_2(s_2+1)], \end{aligned}$$

para elétrons $s_1 = s_2 = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{\hbar^2} T = \frac{1}{2} [S(S+1) - \frac{3}{2}], \text{ não depende de } M$$

$$\frac{1}{\hbar^2} T |SM\rangle = \begin{cases} -\frac{3}{4} |SM\rangle, & \text{para } S=0 \text{ (singlete)} \\ \frac{1}{4} |SM\rangle, & \text{para } S=1 \text{ (triplete)} \end{cases}$$

De maneira que o operador

$$\Omega \equiv \frac{1}{2} \left(1 + \frac{4}{\hbar^2} \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 \right)$$

toma os valores

$$\begin{aligned} \Omega |00\rangle &= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{4}{\hbar^2} \left(-\frac{3}{4} \hbar^2 \right) \right] |00\rangle \\ &= -|00\rangle \end{aligned}$$

$$\Omega |S=1, M\rangle = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{4}{\hbar^2} \frac{\hbar^2}{4} \right) |S=1, M\rangle = |S=1, M\rangle$$

Lembramos que todas as $|S=1, M\rangle$, $M=\pm 1, 0$, são simétricas. O operador Ω nada mais é que o operador de permutação do spin:

$$P_{12}^{(\text{spin})} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{4}{\hbar^2} \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 \right)$$

Esta relação foi descoberta por Dirac e Heisenberg. A transformação

$$|\alpha\rangle \rightarrow P_{12} |\alpha\rangle,$$

significa então, para a parte spinorial e orbital

$$\phi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \rightarrow \phi(\vec{x}_2, \vec{x}_1), \quad \chi(s_1, s_2) \rightarrow \chi(s_2, s_1).$$

De maneira que a parte orbital e a parte spinorial podem ter simetrias diferentes da "completamente" simétrica.

O produto $\phi\chi$ tem que ser antisimétrico, de acordo com o Princípio de Pauli. Para duas partículas, temos as seguintes combinações possíveis:

$$\begin{cases} \phi_{\text{sim}} \cdot \chi_{\text{ants.}} \\ \phi_{\text{ants.}} \cdot \chi_{\text{sim}} \end{cases}$$

A parte espacial $\phi(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ tem a interpretação probabilística

usual. A probabilidade de encontrar o primeiro elétron em um elemento de volume d^3x_1 centrado em \vec{x}_1 e o outro em (d^3x_2, \vec{x}_2) é

$$|\phi(\vec{x}_1, \vec{x}_2)|^2 d^3x_1 d^3x_2$$

Consideremos o caso específico quando as interações entre as partículas podem ser ignoradas. Seja H_0 o Hamiltoniano de uma partícula:

$$H_0 = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V_{\text{ext}}(\vec{x}).$$

O Hamiltoniano do sistema completo é uma soma de Hamiltonianos de uma partícula:

$$\begin{aligned} H(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{x}_1, \vec{x}_2) &= \frac{\vec{p}_1^2}{2m} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m} + V_{\text{ext}}(\vec{x}_1) + V_{\text{ext}}(\vec{x}_2) \\ &= H_0(\vec{p}_1, \vec{x}_1) + H_0(\vec{p}_2, \vec{x}_2), \end{aligned}$$

e a eq. de Schrödinger para os estados estacionários é

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_1^2 - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_2^2 + V_{\text{ext}}(\vec{x}_1) + V_{\text{ext}}(\vec{x}_2) \right\} \psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = E \psi,$$

que é claramente separável. Como o Hamiltoniano não depende do spin, podemos separar a parte spinorial

$$\psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \phi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \chi(s_1, s_2),$$

onde as $\chi(s_1, s_2)$ são as soluções dadas anteriormente para o singlete e tripleto. Mas a parte espacial, em ausência das interações inter-partículas, também pode ser separada como um produto de funções de 1-partícula:

$$\phi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \rightarrow \omega_A(\vec{x}_1) \omega_B(\vec{x}_2).$$

Mas sabemos que temos que satisfazer o requerimento do Princípio de Pauli, de maneira que a parte orbital tem que ser combinada com a parte spinorial, resultando uma função de onda completamente antissimétrica. Escreveremos então:

$$\phi_{\pm}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\omega_A(\vec{x}_1) \omega_B(\vec{x}_2) \pm \omega_A(\vec{x}_2) \omega_B(\vec{x}_1) \right]$$

$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{+}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \text{ é a parte orbital para o singlete } \chi^{(0)}, \\ \phi_{-}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \text{ é a parte orbital para o tripleto } \chi^{(1)}. \end{array} \right.$

Para uma função deste tipo, ϕ_{\pm} , calculamos a probabilidade de observar o elétron 1 em (\vec{x}_1, d^3x_1) e o elétron 2 em (\vec{x}_2, d^3x_2) :

$$\begin{aligned} |\phi_{\pm}(\vec{x}_1, \vec{x}_2)|^2 d^3x_1 d^3x_2 &= \frac{1}{2} \left\{ |\omega_A(\vec{x}_1)|^2 |\omega_B(\vec{x}_2)|^2 + |\omega_A(\vec{x}_2)|^2 |\omega_B(\vec{x}_1)|^2 \right. \\ &\quad \left. \pm (\omega_A(\vec{x}_1) \omega_B(\vec{x}_2) \omega_A^*(\vec{x}_2) \omega_B^*(\vec{x}_1) + \omega_A^*(\vec{x}_1) \omega_B^*(\vec{x}_2) \omega_A(\vec{x}_2) \omega_B(\vec{x}_1)) \right\} \end{aligned}$$

$$\text{ou}$$

$$|\phi_{\pm}(\vec{x}_1, \vec{x}_2)|^2 d^3x_1 d^3x_2 = \frac{1}{2} \left\{ |\omega_A(\vec{x}_1)|^2 |\omega_B(\vec{x}_2)|^2 + |\omega_A(\vec{x}_2)|^2 |\omega_B(\vec{x}_1)|^2 \pm \right.$$

$$\left. \pm 2 \operatorname{Re} \left[\omega_A(\vec{x}_1) \omega_B(\vec{x}_2) \omega_A^*(\vec{x}_2) \omega_B^*(\vec{x}_1) \right] \right\} d^3x_1 d^3x_2$$

Os dois primeiros termos são chamados de densidades normais, dão conta das possibilidades

$$\omega_A(\vec{x}_1) \omega_B(\vec{x}_2)$$

$$\omega_A(\vec{x}_2) \omega_B(\vec{x}_1)$$

sem interferências. O último termo, resultado da estatística, é chamado densidade de troca. Vemos claramente que os comportamentos de ϕ_{\pm} são radicalmente diferentes. Para o estado tripleto ("spins alinhados")

$$|\phi_{-}(\vec{x}, \vec{x})| d^3x_1 d^3x_2 = 0,$$

de maneira que a probabilidade de encontrar dois elétrons no mesmo ponto do espaço é nula (existe uma "correlação puramente cinemática" nos elétrons). No estado singlete, $|\phi_{+}|^2$ é aumentado para $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$ (spins anti-alinhados). Na análise de qual estado minimiza a energia, temos que considerar a interação entre os elétrons, onde participa um termo não clássico, chamado energia de troca. Se incluirmos a interação eletrônica como uma perturbação, temos que calcular

médias de $V_{int}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \frac{e^2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}$ entre estados

simétricos e anti-simétricos respectivamente. Obtemos o resultado

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{e^2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} \right\rangle_{\pm} &= \langle \phi_{\pm}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) | V_{int}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) | \phi_{\pm}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \rangle \\ &= \int d^3x_1 \int d^3x_2 \frac{1}{2} \left[\omega_A^*(\vec{x}_1) \omega_B^*(\vec{x}_2) \pm \omega_A^*(\vec{x}_2) \omega_B^*(\vec{x}_1) \right] \frac{e^2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} \times \\ &\quad \times \left[\omega_A(\vec{x}_1) \omega_B(\vec{x}_2) \pm \omega_A(\vec{x}_2) \omega_B(\vec{x}_1) \right] \end{aligned}$$

► Def. Definimos as integrais seguintes:

a) termo direto:

$$I \equiv \int d^3x_1 \int d^3x_2 e^2 \frac{|\omega_A(\vec{x}_1)|^2 |\omega_B(\vec{x}_2)|^2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|},$$

este é essencialmente um termo clássico de repulsão eletro-
nica entre duas densidades de carga

$$\rho_A(\vec{x}_1) \equiv e |\omega_A(\vec{x}_1)|^2,$$

$$\rho_B(\vec{x}_2) \equiv e |\omega_B(\vec{x}_2)|^2$$

b) termo de troca:

$$J \equiv \int d^3x_1 \int d^3x_2 \frac{\omega_A^*(\vec{x}_1) \omega_B^*(\vec{x}_2) e^2 \omega_A(\vec{x}_2) \omega_B(\vec{x}_1)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}$$

Este termo de troca não tem análogo clássico e é consequência direta da estatística.

O valor médio $\left\langle \frac{e^2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} \right\rangle_{\pm}$ pode ser escrito como

$$\left\langle \frac{e^2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} \right\rangle_{\pm} = I \pm J = \begin{cases} I + J, & \text{para o singlete} \\ I - J, & \text{para o tripleto} \end{cases}$$

$I > 0$ é positivo definido, mas J pode ser positivo ou negativo, de maneira que a priori não sabemos qual é o estado de mais baixa energia. Isso dependerá das funções de 1-partícula $\omega_{A,B}$.

Lembramos que o Hamiltoniano não depende do spin:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0(\vec{p}_1, \vec{x}_1) + \mathcal{H}_0(\vec{p}_2, \vec{x}_2) + \frac{e^2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|},$$

onde $\mathcal{H}_0(\vec{p}, \vec{x}) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V_{\text{ext}}(\vec{x})$.

Calculamos a energia, para o singlete e o tripleto, da parte livre $\mathcal{H}_0(1) + \mathcal{H}_0(2)$:

$$E_0^{\pm} = \frac{1}{2} \int d^3x_1 \int d^3x_2 \left[\omega_A^*(\vec{x}_1) \omega_B^*(\vec{x}_2) \pm \omega_A^*(\vec{x}_2) \omega_B^*(\vec{x}_1) \right] \left[\mathcal{H}_0(\vec{p}_1, \vec{x}_1) + \mathcal{H}_0(\vec{p}_2, \vec{x}_2) \right] \left[\omega_A(\vec{x}_1) \omega_B(\vec{x}_2) \pm \omega_A(\vec{x}_2) \omega_B(\vec{x}_1) \right]$$

Vamos mostrar que os termos cruzados se anulam. Tomemos como exemplo:

$$\begin{aligned} & \int d^3x_1 \int d^3x_2 \omega_A^*(\vec{x}_1) \omega_B^*(\vec{x}_2) \mathcal{H}_0(\vec{p}_1, \vec{x}_1) \omega_A(\vec{x}_2) \omega_B(\vec{x}_1) \\ &= \int d^3x_1 \omega_A^*(\vec{x}_1) \mathcal{H}_0(\vec{p}_1, \vec{x}_1) \omega_B(\vec{x}_1) \underbrace{\int d^3x_2 \omega_B^*(\vec{x}_2) \omega_A(\vec{x}_2)}_0 \\ &= 0, \text{ por ortogonalidade} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_0^\pm &= \int d^3x_1 \omega_A^*(\vec{x}_1) \mathcal{H}_0(\vec{p}_1, \vec{x}_1) \omega_A(\vec{x}_1) \underbrace{\int d^3x_2 |\omega_B(\vec{x}_2)|^2}_1 \\ &+ \int d^3x_1 \underbrace{|\omega_A(\vec{x}_1)|^2}_1 \int d^3x_2 \omega_B^*(\vec{x}_2) \mathcal{H}(\vec{p}_2, \vec{x}_2) \omega_B(\vec{x}_2) \end{aligned}$$

$$\equiv E_A + E_B, \text{ não depende da simetria do estado.}$$

Assim a energia é:

$$E_\pm = E_A + E_B + I \pm J \begin{cases} +, \text{ para o singlete, } S=0 \\ -, \text{ para o tripleto, } S=1 \end{cases}$$

Estas duas energias podem ser obtidas a partir de um Hamiltoniano dependente do spin, com o operador de troca. Em efeito, consideremos o seguinte Hamiltoniano efetivo:

$$\mathcal{H}(1,2) = E_A + E_B + I - \frac{2}{\hbar^2} J (\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 + \frac{\hbar^2}{4})$$

Em efeito, para o estado singlete temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(1,2)|0\rangle &= \left[E_A + E_B + I - \frac{2}{\hbar^2} J \left(-\frac{3}{4}\hbar^2 + \frac{\hbar^2}{4} \right) \right] |0\rangle \\ &= (E_A + E_B + I + J) |0\rangle = E_+ |0\rangle, \end{aligned}$$

e para o tripleto:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(1,2)|1\rangle &= \left[E_A + E_B + I - \frac{2}{\hbar^2} J \left(\frac{\hbar^2}{4} + \frac{\hbar^2}{4} \right) \right] |1\rangle \\ &= (E_A + E_B + I - J) |1\rangle = E_- |1\rangle \end{aligned}$$

► Def.

$$J \equiv \frac{2}{\hbar^2} J$$

O Hamiltoniano efetivo de spin tem a forma

$$\mathcal{H} = -J(\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2) + \text{cte.}$$

Este Hamiltoniano, descoberto por Dirac, é a base do modelo de Heisenberg do magnetismo. A integral de troca J nada mais é que um termo das interações de Coulomb modificada pelo efeito quântico da troca. Se $J > 0$, o estado fundamental é o tripleto (ferromagnetismo); se $J < 0$, o estado fundamental é o singlete (antiferromagnetismo). Esta integral, assim como

o termo direto I , depende do "overlap" entre as funções individuais:

$$J = \int d\vec{x}_1 \int d\vec{x}_2 e^2 \frac{\omega_A^*(\vec{x}_1) \omega_B^*(\vec{x}_2) \omega_A(\vec{x}_2) \omega_B(\vec{x}_1)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}$$

Intuitivamente, esperamos que o estado tripleto tenha energia mais baixa ($J > 0$). Isto porque dois elétrons com spins paralelos não podem ficar no mesmo sítio (ao contrário do estado singleto). O estado tripleto minimizaria a energia da repulsão de Coulomb. Porém a situação é mais complicada para diferentes orbitais e maior número de elétrons, de maneira que anti-ferromagnetismo não está descartado.

§ Tabelas de Young

35

Estudemos o problema de dois elétrons desde um outro ponto de vista. Representamos o estado do spin de um elétron por um quadradinho \square . Para $s = \frac{1}{2}$, temos dois estados que simbolizamos como $\boxed{1}$ para spin \uparrow , e $\boxed{2}$ para spin \downarrow . Estas caixinhas são os objetos básicos de $SU(2)$. Cada quadradinho representa um duplete.

Para duas partículas, definimos as tabelas simétrica e anti-simétrica:

$$\text{simétrica} \leftrightarrow \boxed{\square \square}, \quad \text{anti-simétrica} \leftrightarrow \boxed{\square \square}$$

Para $s = \frac{1}{2}$, $\boxed{\square \square}$ é a tabela do estado tripleto e $\boxed{\square \square}$ a do estado estado singlete. O estado tripleto é construído como

$$S=1, \quad \left\{ \begin{array}{l} \boxed{11}, \quad |\uparrow\uparrow\rangle \\ \boxed{22}, \quad |\downarrow\downarrow\rangle \\ \boxed{12}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) \end{array} \right.$$

Não escrevemos $\boxed{21}$, porque $\boxed{\square \square}$ é simétrica, e é sobre-entendido. A contagem dupla é evitada exigindo que os números não decresçam de esquerda para direita. Para a tabela anti-simétrica $\boxed{\square \square}$ só temos uma possibilidade

$$\boxed{\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array}} \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle),$$

pois não podemos anti-simetrizar com estados iguais.

Assim não existem $\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}$ e $\begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$. Assim, os números têm

que crescer quando vamos de arriba para baixo.

Estes estados podem ser pensados como gerados mediante acoplamento de estados de 1-partícula, através do produto tensorial. A receita, para o produto, é adicionar o quadradinho extra (mais uma partícula) de todas as maneiras possíveis, formando tabelas "regulares", onde o número de quadrados por linha não cresce

$$\begin{array}{c} (2) \quad (2) \quad (3) \quad (1) \\ \square \otimes \square = \square \square + \square, \quad (2 \times 2) = 3 + 1 \\ s=1/2 \quad s=1/2 \quad s=1 \quad s=0 \end{array}$$

Esta regrinha, se corresponde com a adição do momento angular

$$D^{(1/2)} \times D^{(1/2)} = D^{(0)} + D^{(1)}$$

Outra regra:

Tabelas para $s=1/2$ (dois estados) não podem ter mais de duas linhas (não podemos anti-simetrizar com mais linhas, pois tendo apenas dois estados disponíveis, necessariamente um estado será repetido). Vejamos como podemos estender estas regras para 3 partículas:

$$\begin{array}{c} (3) \quad (2) \\ \square \square \otimes \square = \square \square \square + \square \square \end{array}$$

Qual é a dimensão de $\square\square$ e \square ?

$$\begin{array}{ccccccc} \square\square\square\square & \square\square\square & \square\square\square & \square\square\square & \longrightarrow & 4 \\ \begin{array}{|c|} \hline \square\square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline \square\square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} & & & \longrightarrow & 2 \end{array}$$

Assim: $(3 \times 2) = 4 + 2$

A outra situação:

$$\begin{array}{c} (1) \\ \square \end{array} \otimes \begin{array}{c} (2) \\ \square \end{array} = \begin{array}{c} (2) \\ \square \end{array} + \cancel{\begin{array}{c} (1) \\ \square \end{array}}$$

As relações para acoplamento do momento angular são:

$$D^{(1)} \times D^{(1/2)} = D^{(3/2)} + D^{(1/2)} \leftrightarrow \square \otimes \square = \square\square + \square$$

$$D^{(0)} \times D^{(1/2)} = D^{(1/2)} \leftrightarrow \square \otimes \square = \square$$

Assim facilmente temos: $\square \leftrightarrow D^{(1/2)}$
 $\square\square \leftrightarrow D^{(3/2)}$

Regra mnemônica: Em $SU(2)$, a tabela de Young

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \dots \square \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} \text{ tem spin } S = \frac{n-m}{2}$$

§ Generalização para 3 estados.

Este caso pode representar momentum angular $l=1$, ou o caso de $SU(3)$. Este último é útil para a classificação das partículas elementares, com os três quarks (u, d, s).

Cada quadradinho representa agora um tripleto, pois pode ser preenchido por qualquer um dos estados (1,2,3)

$$\square : \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \dim 3$$

i) Duas partículas:

$$\begin{matrix} (3) & (3) & (6) & (3) \\ \square \otimes \square & = & \square + \square & \rightarrow (3 \times 3) = 6 + 3 \end{matrix}$$

dim de \square e \square ?

$$\square : \begin{bmatrix} 11 \\ 12 \\ 13 \\ 22 \\ 23 \\ 33 \end{bmatrix} \rightarrow 6$$

$$\square : \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \rightarrow 3$$

No caso de momentum angular temos:

$$D^{(1)} \times D^{(1)} = D^{(2)} + D^{(1)} + D^{(0)}$$

5 3 1

de maneira que não temos uma decomposição direta como para $SU(2)$. Vamos estudar agora 3 partículas:

ii) 3 partículas: $\begin{matrix} (6) \\ \square \square \end{matrix} \otimes \begin{matrix} (3) \\ \square \end{matrix} = \begin{matrix} (10) \\ \square \square \square \end{matrix} + \begin{matrix} (8) \\ \square \square \end{matrix}$

$\square \square \square$: $\begin{matrix} 111 \\ 112 \\ 113 \\ 122 \\ 123 \\ 133 \\ 222 \\ 233 \\ 333 \end{matrix} \rightarrow 10$

$\square \square$: $\begin{matrix} 11 \\ 2 \\ 12 \\ 2 \\ 13 \\ 2 \\ 13 \\ 3 \\ 22 \\ 3 \\ 23 \\ 3 \end{matrix} \rightarrow 8$

ou $(6 \times 3) = 10 + 8$. Esta \times corresponde com a lei de adição de momento angular?

$\begin{matrix} (3) \\ \square \end{matrix} \otimes \begin{matrix} (3) \\ \square \end{matrix} = \begin{matrix} (8) \\ \square \square \end{matrix} + \begin{matrix} (1) \\ \square \end{matrix} \rightarrow (3 \times 3) = 8 + 1$

Finalmente:

$\begin{matrix} (6) \\ \square \otimes \square \end{matrix} \otimes \begin{matrix} (3) \\ \square \end{matrix} = (\begin{matrix} (10) \\ \square \square \end{matrix} + \begin{matrix} (8) \\ \square \square \end{matrix}) \otimes \begin{matrix} (3) \\ \square \end{matrix}$
 $= \begin{matrix} (10) \\ \square \square \square \end{matrix} + \begin{matrix} (1) \\ \square \end{matrix} + 2 \begin{matrix} (8) \\ \square \square \end{matrix}$

$D^{(1)} \times D^{(1)} \times D^{(1)} = (D^{(2)} + D^{(0)} + D^{(0)}) \times D^{(1)}$
 $= D^{(3)} + D^{(2)} + D^{(1)} + D^{(2)} + D^{(1)} + D^{(0)} + D^{(1)}$
 $= D^{(3)} + 2D^{(2)} + 3D^{(1)} + D^{(0)}$
 $\quad \quad \quad 7 \quad \quad 2 \cdot 5 \quad \quad 3 \cdot 3 \quad \quad 1$

ou $3 \times 3 \times 3 = 27 = 7 + 10 + 9 + 1$

Das relações obtidas temos:

$$\square \rightarrow D^{(0)} + D^{(2)} \quad (J=0,2)$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \rightarrow D^{(1)} \quad (J=1)$$

$$D^{(1)} \times D^{(1)} = D^{(2)} + D^{(1)} + D^{(0)}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}$$

3 3 8 1

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \rightarrow D^{(1)} + D^{(2)} \quad (J=1,2)$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \rightarrow D^{(0)} \quad (J=0)$$

Resultado: $\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \rightarrow D^{(1)} + D^{(3)}$

$$(D^{(0)} + D^{(2)}) \times D^{(1)} = D^{(1)} + D^{(3)} + D^{(2)} + D^{(1)}$$

$$\square \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}$$